

$p(x)$ 调和映射在图像恢复中的应用

黎芳^{1,2)} 刘瑞华²⁾

¹⁾ (华东师范大学数学系, 上海 200062) ²⁾ (西南大学数学与统计学院, 重庆 400715)

摘要 本文研究了基于 $p(x)$ 调和映射的变分图像恢复模型, 得到关于能量泛函极小解的存在唯一性, 导出了相应的演化方程。实验结果表明, 此模型结合了 TV 非迷向扩散模型以及高斯迷向扩散的优点, 在保持轮廓的基础上, 减少了“块状”效应, 并且提高了计算效率。

关键词 调和映射 TV 模型 变分方法 演化方程

中图法分类号: TP391.41 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2008)01-0019-05

The Application of $p(x)$ Harmonic Mapping in Image Processing

LI Fang^{1,2)}, LIU Ruihua²⁾

¹⁾ (Department of Mathematics, East China Normal University, Shanghai 200062)

²⁾ (School of Mathematics and Statistics, South West University, Chongqing 400715)

Abstract In this paper, we studied a variational model in image restoration based on $p(x)$ harmonic mapping and acquired the existence and uniqueness of minimized energy function. Then we deduce the corresponding evolution equation. From the experimental results, the proposed model shows its advantages of combining an isotropic total variational (TV) diffusion model with Gaussian isotropic diffusion model, since it can not only reduce the “blocky” effect while preserving edges but also improve computing efficiency.

Keywords harmonic mapping, TV model, variational model, evolution equation

1 引言

一般来说, 数字图像可分为 3 个部分: 平坦区域 (逐段常值信号的区域), 光滑区域 (图像灰度光滑变化的区域) 和不连续区域 (灰度值发生跳跃的区域, 例如图像轮廓)。对于被噪声污染的图像, 恢复的关键是要在去除噪声的基础上保持图像的重要信息, 比如图像轮廓。本文主要研究此类图像恢复的问题。

近年来, 变分方法在图像恢复、图像增强、图像分割以及图像修补等方面都得到了广泛的应用^[1]。其基本思路是首先把要处理的问题归结为某个能量泛函的极小化问题, 其次导出相应的 Euler-Lagrange

方程, 利用负梯度下降流得到演化方程, 然后利用数值方法求解此方程即可得到变分问题的极小解。

一般地, 可以把灰度图像看成连续函数。假设 $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ 是图像的定义域, $u: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ 是灰度图像 (函数)。在理论研究中, 因为图像中往往有灰度跳跃和不连续性, 比较合理的假设是 $u \in BV(\Omega)$, 其中 $BV(\Omega)$ 表示定义在区域 Ω 上的有界变差函数全体。

TV (total variation) 模型是图像处理中的一个十分成功的变分模型。此模型是 1992 年由 Rudin 等人提出的能量泛函极小化问题^[2], 如式 (1) 所示:

$$\min_{u \in BV(\Omega) \cap L^2(\Omega)} E(u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^p + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} (u - I)^2 dx \quad (1)$$

基金项目: 国家自然科学基金项目 (10671066); 国家重点基础研究发展计划“973”项目 (2006CB708305)

收稿日期: 2006-05-22 改回日期: 2006-09-20

第一作者简介: 黎芳 (1978~), 女。2007 年于华东师范大学基础数学专业获博士学位, 现为华东师范大学讲师。主要研究方向为图像处理。E-mail: lifangsvnu@126.com

其中, $p = 1, \lambda$ 是参数, $I: \Omega \rightarrow R$ 是给定的初始图像, ∇ 是梯度算子, $\|\cdot\|$ 表示求向量的模长, $BV(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ 是使得问题有意义的函数空间。TV 模型被成功地应用到了图像恢复中, 因为它具有保持图像轮廓的特性。而这对于图像恢复问题是至关重要的。从物理角度看, 由于式(1)导出的扩散是正交于图像梯度方向即沿着图像轮廓线方向的非迷向扩散, 所以能够保持图像轮廓。但是 TV 模型也有自身的不足, 它会导致“块状”效应。因为式(1)往往倾向于逐段常值解, 从而使得光滑区域被处理成逐段常值, 看起来呈现“块状”, 这不仅会导致人眼观察时的不适, 还可能会出现不正确的轮廓以至于产生误导。当 $p = 2$ 时, 此模型对应于高斯迷向扩散, 可以很快的平滑噪声, 对光滑区域的处理效果很好, 代价是导致图像轮廓的模糊。自然地, 如果把两者结合起来, 发挥 TV 扩散在保持轮廓方面的优势和高斯迷向扩散在对光滑区域方面处理的优势, 扬长避短, 在图像处理尤其是图像恢复中就可以取得更好的效果。这方面已有如下一些工作。

Chambolle 等人结合 TV 扩散和高斯扩散提出了如下能量泛函极小化问题^[3]:

$$\min_{u \in H^1(\Omega)} \left\{ E(u) = \frac{1}{2\beta} \int_{|\nabla u| \leq \beta} |\nabla u|^2 + \int_{|\nabla u| > \beta} \left(|\nabla u| - \frac{\beta}{2} \right) dx \right\} \quad (2)$$

在此模型中, β 是阈值(常数), 当 $|\nabla u| > \beta$ 时, 即容易出现轮廓的区域, 采用 TV 扩散; 而当 $|\nabla u| \leq \beta$ 时, 即光滑区域, 采用高斯迷向扩散。此模型在图像恢复中得到了成功的应用, 但是效果十分依赖于阈值的选择。

在上述模型中, 若保真项系数 $\lambda = 0, p$ 取常值, 则对应于 p 调和映射; 事实上, p 也可取为函数, 这时称为 $p(x)$ 调和映射, 下面的模型以及本文提出的模型属于此类。

Blomgren 等人提出了下面的极小化问题^[4]:

$$\min \left\{ E(u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p|\nabla u|} dx \right\} \quad (3)$$

其中, p 单调递减。此模型也可以结合 TV 扩散和高斯扩散之长, 但是由于 p 依赖于 $|\nabla u|$, 能量泛函的下半连续性很难建立, 理论上的探讨很困难。

为了克服式(2)模型对阈值的依赖和式(3)中 p 的未知性以及理论探讨上的困难, 本文提出了如下替代模型。

2 新模型的提出及能量泛函极小解的存在唯一性

受上述模型的启发, 得到下面的模型:

$$\min_{u \in W^{1,1+\gamma}(\Omega) \cap L^2(\Omega)} \left\{ E(u) = \int_{\Omega} \frac{1}{1+g} |\nabla u|^{1+\varepsilon} dx + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} (u - I)^2 dx \right\} \quad (4)$$

其中, $g = \frac{1}{1+k|\nabla G_{\sigma} * I(x)|}$ 为通常的停止函数(*代表卷积), $G_{\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2\sigma^2}\right)$ 是高斯滤波, $k > 0, \sigma > 0$ 是固定参数。假设 $I \in L^{\infty}(\Omega)$, 由高斯卷积的性质, 容易得到 $g \geq \frac{1}{1+C\|I\|_{L^{\infty}(\Omega)}}$, 令 $\gamma =$

$\frac{1}{1+C\|I\|_{L^{\infty}(\Omega)}}$, 则 g 有一致正下界 γ 。在图像轮廓的区域, 由于图像梯度很大, $g \rightarrow 0$, 式(4)相当于 TV 扩散; 在光滑区域, 由于图像梯度很小, $g \rightarrow 1$, 式(4)相当于高斯扩散。在其他区域, 则由函数 g 来调整扩散的方式, 梯度越大, 越接近 TV 扩散。梯度越小, 越接近高斯扩散。这样从理论上讲式(4)模型应当兼有两者的长处。并且与式(2)模型相比, 不需要取定阈值, 从而更加灵活、自动化。与式(3)模型相比, 此模型更具有理论意义, 可做如下理论探讨。

定理 1 式(4)极小化问题存在唯一弱解 $u_* \in W^{1,1+\gamma}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$

证明 令 $f(x, u, \nabla u) = \frac{1}{1+g} |\nabla u|^{1+\varepsilon} + \frac{\lambda}{2} (u - I)^2$

下证 $f(x, u, \xi)$ 关于 ξ 凸。

$$f_{\xi_i} = \frac{1}{1+g} (1+g) |\xi|^{\varepsilon} \frac{\xi_i}{|\xi|} = |\xi|^{\varepsilon-1} \cdot \xi_i$$

$$f_{\xi_i \xi_j} = (g-1) |\xi|^{\varepsilon-2} \frac{\xi_j}{|\xi|} \xi_i + |\xi|^{\varepsilon-1} \delta_{i,j}$$

$$= |\xi|^{\varepsilon-1} ((g-1)\xi_i \xi_j + \delta_{i,j})$$

$$\forall \eta \in R^n$$

$$f_{\xi_i \xi_j} \eta^i \eta^j = (g-1) |\xi|^{\varepsilon-3} \xi_i \xi_j \eta^i \eta^j + |\xi|^{\varepsilon-1} \delta_{i,j} \eta^i \eta^j$$

式中, 上下指标相同表示求和, 由柯西不等式,

$$\xi_i \xi_j \eta^i \eta^j = \left(\sum \xi_i \eta_i \right)^2 \leq \left(\sum \xi_i^2 \right) \left(\sum \eta_i^2 \right) = |\xi|^2 |\eta|^2$$

用于上式, 可得 $f_{\xi_i \xi_j} \eta^i \eta^j \geq (g-1) |\xi|^{\varepsilon-3} |\xi|^2 |\eta|^2 + |\xi|^{\varepsilon-1} |\eta|^2 = g |\xi|^{\varepsilon-1} |\eta|^2 \geq 0$, 所以 f 关于 ξ 凸, 由变分法的经典结论, f 在 $W^{1,p}, 1 < p <$

∞ 中弱下半连续。又容易看出, f 关于 u 严格凸。

由于式(4)能量有下界 0, 且对初始图像 I , $E(I)$ 为定值, 所以泛函 E 一定存在下确界, 设为 μ 。取极小化序列 $\{u_k\} \subset W^{1,1+\gamma}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$, 使得 $\lim_{k \rightarrow \infty} E(u_k) = \inf_{u \in W^{1,1+\gamma}(\Omega) \cap L^2(\Omega)} E(u) = \mu$ 。则 $\{u_k\}$ 是 $W^{1,1+\gamma}(\Omega)$ 中的有界序列, 这是因为当 k 充分大时, 有

$$E(u_k) = \int_{\Omega} \frac{1}{1+g} |\nabla u_k|^{1+g} dx + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} (u_k - I)^2 dx < \mu + 1$$

所以存在子序列(仍记为 $\{u_k\}$, 下同), 在 $L^2(\Omega)$ 中有界, 于是存在弱收敛的子序列 $\{u_k\}$, 以及弱极限 $u_* \in L^2(\Omega)$ 。又由于

$$\int_{\Omega} \frac{1}{1+g} |\nabla u_k|^{1+g} dx = \int_{|\nabla u_k| < 1} \frac{1}{1+g} |\nabla u_k|^{1+g} dx + \int_{|\nabla u_k| \geq 1} \frac{1}{1+g} |\nabla u_k|^{1+g} dx < \mu + 1$$

$$\|\nabla u_k\|_{L^{1+\gamma}(\Omega)} \leq 2 \left(\int_{|\nabla u_k| < 1} \frac{1}{1+g} |\nabla u_k|^{1+\gamma} dx + \int_{|\nabla u_k| \geq 1} \frac{1}{1+g} |\nabla u_k|^{1+\gamma} dx \right) < 2 \left(\int_{|\nabla u_k| < 1} dx + \int_{|\nabla u_k| \geq 1} \frac{1}{1+g} |\nabla u_k|^{1+g} dx \right) \leq 2(|\Omega| + \mu + 1)$$

于是可断言 $\{u_k\}$ 是 $W^{1,1+\gamma}(\Omega)$ 中的有界序列, 从而存在弱收敛的子序列 $\{u_k\}$ 以及弱极限 $u_* \in W^{1,1+\gamma}(\Omega)$, 由弱极限的唯一性 $u_* = u_*$ 。由 f 的弱下半连续性, 有

$$E(u_*) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} E(u_k) = \mu$$

这就证明了 $u_* \in W^{1,1+\gamma}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ 是泛函式(4)的极小解。唯一性由 f 关于 u 的严格凸性可得。

3 演化方程及数值实现

为了求出能量泛函的极小解, 根据标准的变分法, 首先要求出其 Euler-Lagrange 方程, 其次利用负梯度下降流得到演化方程, 然后利用数值方法求解此方程即可得到变分问题的极小解。

根据标准的变分法理论, 首先要求出 E 在 u 处沿 v 方向的 Gateaux 导数为

$$\frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} E(u + \varepsilon v) = \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \left(\int_{\Omega} \frac{1}{1+g} |\nabla u + \varepsilon \nabla v|^{1+g} dx + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} (u + \varepsilon v - I)^2 dx \right)$$

$$= \int_{\Omega} |\nabla u|^{g-1} \nabla u \nabla v dx + \lambda \int_{\Omega} (u - I) v dx = \int_{\partial\Omega} |\nabla u|^{g-1} \frac{\partial u}{\partial n} v dx - \int_{\Omega} \operatorname{div}(|\nabla u|^{g-1} \nabla u) v dx + \lambda \int_{\Omega} (u - I) v dx$$

式中, ε 是微小变量。

如果加上 Neumann 边界条件 $\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 0$, n 表示区域边界, $\partial\Omega$ 的单位外法向量得到对应的 Euler-Lagrange 方程为

$$-\operatorname{div}(|\nabla u|^{g-1} \nabla u) + \lambda(u - I) = 0$$

利用负梯度下降流, 得到相应的演化方程

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(|\nabla u|^{g-1} \nabla u) - \lambda(u - I) \\ u|_{t=0} = I \\ \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

然后利用有限差分格式去离散上述演化方程, 从而求数值解。具体差分格式如下:

令空间步长为 $h=1$, 时间步长为 τ , 定义

$$\begin{aligned} D_x^{\pm}(u_{i,j}) &= \pm [u_{i\pm 1,j} - u_{i,j}] \\ D_y^{\pm}(u_{i,j}) &= \pm [u_{i,j\pm 1} - u_{i,j}] \end{aligned}$$

$$|D_x(u_{i,j})| = \sqrt{(D_x^+(u_{i,j}))^2 + (m[D_x^+(u_{i,j}), D_x^-(u_{i,j})])^2 + \varepsilon}$$

$$|D_y(u_{i,j})| = \sqrt{(D_y^+(u_{i,j}))^2 + (m[D_y^+(u_{i,j}), D_y^-(u_{i,j})])^2 + \varepsilon}$$

式中, 二元函数 m (自变量用 a, b 表示) 定义为 $m[a, b] = \left(\frac{\operatorname{sgna} + \operatorname{sgnb}}{2} \right) \min(|a|, |b|)$, ε 是充分小的正数, 目的是避免迭代过程中出现奇异性。

为简化起见, 下面省略下指标 i, j , 用 $u^{(k)}$ 代替 $u_{i,j}^{(k)}$, 用来表示第 k 次的迭代结果。迭代公式由下式给出:

$$u^{(k+1)} = u^{(k)} + \tau \left(D_x^- \left(\frac{D_x^+ u^{(k)}}{|D_x u^{(k)}|^{1-g}} \right) + D_y^- \left(\frac{D_y^+ u^{(k)}}{|D_y u^{(k)}|^{1-g}} \right) \right) - \tau \lambda (u - I)$$

式中, 迭代初值取为 $u^0 = I$ 。

4 实验结果及分析

将式(4)模型用于图像恢复, 事实上, 和 TV 模型一样, 此模型还可以用于图像插值, 图像修补等领域。实验中, 采用了标准的 Lena 图像, 因为此图像中有较为明显的光滑区域, 平坦区域和轮廓, 便于比较实验结果。

图 1(a) 为 Lena 标准图像, 其中两个方框标出



(a) Lena图像



(b) 噪声图像 (2.6dB)



(c) TV模型恢复结果 (6.1dB)



(d) 式(4)模型恢复结果 (6.5dB)

图 1 本文模型与 TV 模型的实验结果比较

Fig 1 Experimental results comparison of our proposed model and TV model

的是两个重点要比较的区域;图 1(b)为加倍信噪比 (SNR)为 2.6dB 高斯噪声的 Lena 图像;图 1(c)为 TV 模型的处理结果,其中时间步长 $\tau=0.1$,迭代 200 次,耗时 43s;图 1(d)为本文式 (4)模型处理结果, $\tau=0.1$ 迭代 60 次,耗时 21s。实验中的其他参数: $k=0.005$ $\sigma=0.5$ $\varepsilon=0.0001$ 。这里的 SNR 计算公式如下:

$$\text{SNR} = 10 \lg \left| \frac{\int_{\Omega} (I(x, y) - \bar{I})^2 dx dy}{\int_{\Omega} (n(x, y) - \bar{n})^2 dx dy} \right|$$

$$\bar{I} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} I(x, y) dx dy$$

$$\bar{n} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} n(x, y) dx dy$$

式中, $I(x, y)$ 为真实图像的像素值, n 表示噪声, \bar{I} \bar{n}

分别表示 $I(x, y)$ 和 n 在图像定义域 Ω 内的均值。用本文处理后的结果 SNR 值为 6.5 而 TV 模型处理后的 SNR 值为 6.1, 这说明了本文模型优于 TV 模型。为了更好地观察本文模型是否同时继承了 TV 扩散和高斯扩散的长处,图 2 和图 3 列出了图 1(a)中两个局部区域放大比较的结果。容易看出,对于光滑区域 (区域 II) 的恢复, TV 模型明显地导致“块状”效应,而本文模型处理结果看起来更光滑,视觉上感觉更舒适。对于区域 I,主要是轮廓和逐段常值区域,两个模型具有相似的处理效果。这说明本文模型很好的结合了 TV 模型和高斯迷向扩散的优点,消除了 TV 扩散的“块状”效应,从而提高了图像恢复的质量。从迭代稳定需要的次数和耗费的时间来看,本文模型的计算效率比 TV 模型提高 1 倍以上。

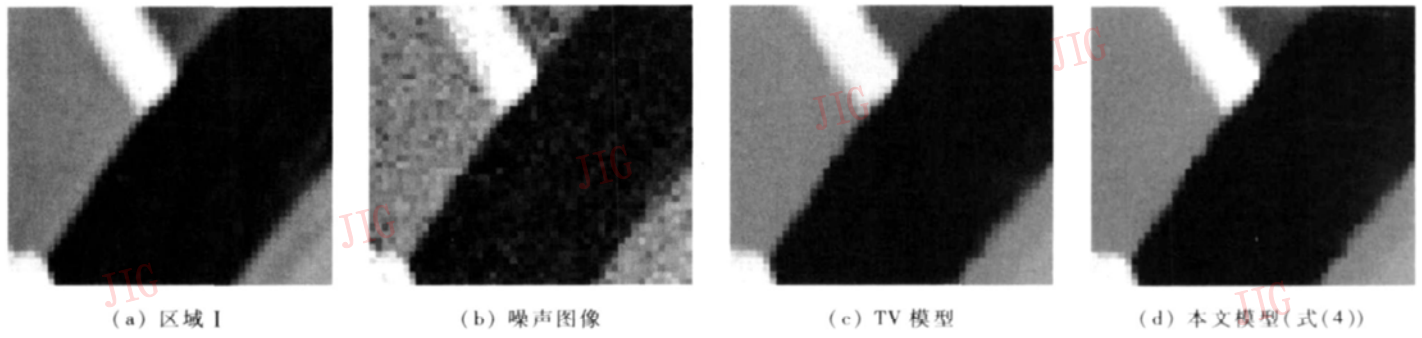


图 2 区域 I 的比较

Fig. 2 Comparison of region I

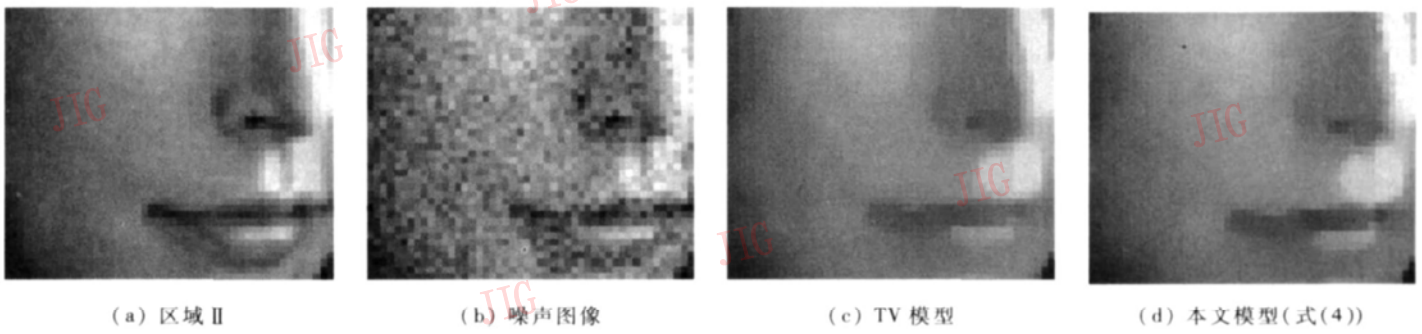


图 3 区域 II 的比较

Fig. 3 Comparison of region II

参考文献 (References)

1 Aubert G, Komprobst P. Mathematical Problems in Image Processing Partial Differential Equations and the Calculus of Variations [M]. New York: Springer-Verlag, 2002. 1~ 227.

2 Rudin L, Osher S, Fatemi E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms[J]. Physica D, 1992, 60: 259~ 268.

3 Chambolle A, Lions P L. Image recovery via total variation minimization and related problems[J]. Numerical Mathematics, 1997, 76: 67~ 188.

4 Blmgren P, Chan T F, Mulet P, et al. Total variation image restoration: Numerical methods and extensions[A]. In: Proceedings of the IEEE International Conference on Image Processing[C], Washington, DC, USA, 1997, 3: 384~ 387.